Lp – Oszlop generálás

Library for Efficient Models and Optimization in Networks

Balázs Dezső

ELTE, Operációkutatási tanszék

Minimális költségű folyam keresés

Legyen adott egy $G = (V, A)$ gráf, egy $u : A \rightarrow \mathrm{R}$ kapacitás függvény és egy $c : A \rightarrow \mathrm{R}$ költség függvény. Továbbá adott $s \neq t \in V$ csúcspontok és egy $r \in \mathrm{R}$ konstans. Keressünk olyan $f : A \rightarrow \mathrm{R}$ folyan függvényt, ami kielégíti a következő lineáris programozási feladatot.

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \in \delta^+(u)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(u)} f_a &= 0 \qquad u \in V \setminus s, t \\
\sum_{a \in \delta^+(t)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(t)} f_a &= r \\
0 \leq \quad f_a \quad &\leq u_a \\
\min \sum_{a \in A} c_a f_a
\end{aligned}
$$

A lineáris programozási feladat mindenképpen egészértékű lesz. Ezt a feladatot könnyen megoldhatjuk LEMON segítségével.

Alternatív formalizálás

Az oszlop generálás

Az előző órán láttuk azt, hogy feltételekkel bővíthetjük a lineáris programunkat. Most ugyanezt az ötletet próbáljuk ki változókra.

Legyen $\mathcal{P}$ az s, t utak halmaza(exponenciálisan sok), x_P változót rendeljük a $P \in \mathcal{P}$ úthoz.

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{P \in \mathcal{P}: a \in P} x_P & \leq & u_a & a \in A \\
\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & = & r & \\
0 & \leq & x_p & p \in \mathcal{P}
\end{array}$$

$$\min \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{a \in P} c_a\right) x_P$$

Általános oszlop generáló módszer

Algoritmus:

- Adott exponenciális számú változó
- Nem használjuk az összes változó kezdetben
- Megoldjuk a feladatot
- Megnézzük, hogy van-e olyan változó, ami javítani tudja a feladatot
- Ha van, akkor legalább egy változó hozzáadásával újra megoldjuk a problémát
- Árazási probléma (Pricing)

Megjegyzés:

- hasonlóság az elvágó sík módszerrel

Javító változó keresése

Az alternatív formalizálás duálisában az élekhez rendelünk változókat, legyen y_a az a élhez tartozó változó. Ezen túl a folyam érték feltételhez rendeljük a z változót.

$$\begin{aligned} \sum_{a \in P} y_a + z &\leq \sum_{a \in P} c_a \qquad P \in \mathcal{P} \\ y_a &\geq 0 \\ \max \sum_{a \in A} u_a y_a + zr & \end{aligned}$$

Olyan utat kell választani, ami a duál feladatot megsérti. Ezért az $c_a - y_a$ szerint kell minimális költségű utat keresni.

Megoldás LEMON-ban

- Kezdő LP felírása, egy nagy költségű mesterséges út
- LP megoldása
- Dijkstra algoritmussal út keresés redukált költség szerint
- Ha az út költsége(folyam értékhez tartozó duál változóval) nem negatív, akkor lépjünk ki az LP-ből
- Egyébként hozzáadjuk a változót, azaz a meghatározott utat
- Újra az LP megoldásától

A problémák

- Természetesen van polinomiális megoldás
- (Ez biztos volt a szeparáció és az optimalizáció kapcsolatából)
- Legjobb megoldások:
  - Minimális átlagsúlyú kör kiiktatás elméleti
  - Hálózati szimplex gyakorlati
  - Költség skálázás
  - Kapacitás skálázás (Ismételt legrövidebb út keresés)