Lp – Vágó síkok módszere

Library for Efficient Models and Optimization in Networks

Balázs Dezső

ELTE, Operációkutatási tanszék

Maximális párosítás probléma

Első lépésként vegyük páros gráfokban a problémát. Legyen egy $(S, T; E)$ páros gráf, és egy $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Határozzuk meg azt $M \subset E$ részhalmazt, melyre $\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \cap e_2 = \emptyset$ és $\sum_{e \in M} w_e$ maximális. Formalizáljuk lineáris programozási feladatként a problémát, x_e jelölje, hogy az e él benne van-e a párosításban:

$$
\begin{aligned}
\sum_{e \in \delta(v)} x_e &\leq 1 \qquad v \in S \cup T \\
0 &\leq x_e \qquad e \in E \\
\max \sum_{e \in E} w_e x_e
\end{aligned}
$$

A lineáris programozási feladat egészértékű lesz. A bizonyítás itt nem szerepel, de a feltétel mátrix teljesen unimoduláris.

Fenti LP felírás problémája

Vegyünk egy tetszőleges páratlan hosszú kört, egységesen 1 élsúllyal. A fenti LP felírásnak megoldása az egységesen $\frac{1}{2}$ vektor, ami nagyobb célfüggvény értéket ad, mint a legjobb egész megoldás.

Bővítsük az LP feladatunkat:

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in\delta(v)} x_e &\leq 1 && v \in V \\
\sum_{e\in\gamma(B)} x_e &\leq \frac{|B|-1}{2} && B \in \mathcal{O} \\
0 &\leq x_e && e \in E \\
\max \sum_{e\in E} w_e x_e &
\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{O}$ a V halmaz páratlan részhalmazai.

Minimális feszitőfenyő

Legyen egy $G = (V, A)$ gráf, és egy $c : A \to \mathrm{R}$ költségfüggvény, és egy $s \in V$ kezdőcsúcs. Határozzuk meg azt a legkisebb költségű fenyőt, aminek kezdőcsúcsa s, és minden csúcsot lefed.
Írjuk fel LP feladatként a problémát:

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e & = & 1 & v \in V \setminus \{s\} \\
\sum_{e \in \delta^+(B)} x_e & \geq & 1 & B \subset V \setminus \{s\} \\
0 & \leq & x_e & e \in E \\
\end{array}
$$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

Általános vágó sík módszer

Algoritmus:

- Adott exponenciális számú feltétel
- Nem írjuk fel a feltételeket előre
- Megoldjuk a feladatot
- Megnézzük, hogy megfelelő-e a megoldás
- Ha nem megfelelő, akkor legalább egy feltétel hozzáadásával újra megoldjuk a problémát

Megjegyzés:

- szeparáció és optimalizáció
- ellipszoid módszer

Szeparálás

Maximális párosítás részletezés nélkül:

- LP átalakítása
- Minimális páratlan vágás
- Gömöry-Hu fa számítás

Feszítőfenyő algoritmus:

- Olyan vágást kell keresni, aminek a forrás oldalán van az s csúcs
- s-ből $|V| - 1$ folyam kiszámítása, vagy
- s-ből minimális vágás meghatározása Hao-Orlin algoritmussal

Megoldás LEMON-ban

- Kezdő LP felírása, minden csúcsba megy be él
- LP megoldása
- Hao-Orlin algoritmussal minimális ki-vágás meghatározása (HaoOrlin::calculateOut)
- Ha a vágás legalább egy, akkor megállunk,
- Egyébként hozzáadjuk azt a feltételt, hogy a nyelő oldali halmazba legalább egy él megy be
- Újra az LP megoldásától

A problémák

- Mindkét problémára van polinomiális megoldás
- (Ez biztos volt a szeparáció és az optimalizáció kapcsolatából)
- Legjobb megoldások:
  - MinCostArborescence elméleti $O(n \log(n) + m)$
  - MinCostArborescence gyakorlati $O(m \log(n))$
  - MaxWeightedMatching elméleti $O(n^2 \log(n) + nm)$
  - MaxWeightedMatching gyakorlati $O(nm \log(n))$
- LEMON megoldások:
  - MinCostArborescence gyakorlati $O(n^2 + m)$
  - MaxWeightedMatching gyakorlati $O(nm \log(n))$